

ТЕХНОЛОГИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ/ENGINEERING TECHNOLOGY

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1> EDN: VELHGD

АППРОКСИМАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ РЕЖУЩЕЙ КРОМКИ ПАЛЬЦЕВОЙ МОДУЛЬНОЙ ФРЕЗЫ СПЛАЙНАМИ БЕЗЬЕ

Научная статья

Петряева И.А.^{1,*}, Грубка Р.М.², Федосеев С.А.³^{1, 2, 3} Донецкий национальный технический университет, Донецк, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (irina_petryaeva[at]mail.ru)

Предложена: 02.06.2026; Принята: 25.09.2026; Опубликовано: 30.09.2026

Аннотация

Зависимости, приведенные в статье, позволяют выполнить аппроксимацию координат точек, принадлежащих режущей кромке пальцевой модульной фрезы, сплайнами Безье 5-го порядка. Представленные зависимости могут быть использованы при решении пространственных технологических задач и анализе процессов, происходящих в процессе формообразования пространственно-модифицированных зубчатых венцов цилиндрических колес. Использование результатов работы в рамках пространственного подхода к решению вопросов формообразования зубчатых венцов с пространственно-модифицированными зубьями на зубофрезерных операциях позволяет теоретически исследовать процессы нарезания зубчатых венцов с целью повышения геометрической точности зубьев, назначения наиболее рациональных режимных параметров обработки для непрерывно изменяющихся условий резания или определения резервов в повышении производительности процесса нарезания модифицированных зубчатых венцов цилиндрических колес.

Ключевые слова: пальцевая модульная фреза, аппроксимация, сплайн Безье, режущая кромка, цилиндрическое зубчатое колесо, система уравнений.

APPROXIMATION OF THE GEOMETRY OF THE CUTTING EDGE OF AN END-MILL-TYPE GEAR CUTTER USING BÉZIER SPLINES

Research article

Petryaeva I.A.^{1,*}, Grubka R.M.², Fedoseev S.A.³^{1, 2, 3} Donetsk National Technical University, Donetsk, Russian Federation

* Corresponding author (irina_petryaeva[at]mail.ru)

Suggested: 02.06.2026; Accepted: 25.09.2026; Published: 30.09.2026

Abstract

The dependencies given in this article make it possible to approximate the coordinates of points on the cutting edge of an end-mill-type gear cutter, using 5th-order Bézier splines. The relationships presented can be used in solving spatial technological problems and analysing the processes occurring during the shaping of spatially modified ring gears of cylindrical wheels. Applying the results of the work within the framework of a spatial approach to addressing issues relating to the shaping of ring gears with spatially modified teeth during gear-milling operations provides an opportunity to theoretically study the processes of gear cutting with the aim of improving the geometric accuracy of the cogs, to determine the most efficient machining parameters for continuously changing cutting conditions, or to identify potential for improving the productivity of the cutting process for modified ring gears of cylindrical wheels.

Keywords: end-mill type gear cutter, approximation, Bézier spline, cutting edge, cylindrical gear, system of equations.

Введение

Исследование процесса формообразования пространственно-модифицированных зубчатых венцов, подразумевает определение взаимосвязи между геометрией режущей части инструмента, кинематикой относительных движений инструмента и заготовки и геометрией боковой поверхности зубьев. Описание геометрии режущей кромки инструмента аналитическими зависимостями необходимо и для анализа изменения параметров срезаемого слоя, исследования силового нагружения режущих кромок инструментов, интенсификации режимов резания, повышения качества обработки зубчатых венцов, управления параметрами поверхностного слоя обрабатываемых поверхностей, совершенствования геометрии режущей части инструмента, совершенствования технологического оборудования и процессов формообразования изделий с зубчатыми венцами [1], [2].

Геометрия режущей кромки пальцевой модульной фрезы в нормативно-технических документах задается координатным способом [3]. В трехмерных постановках технологических задач, при анализе процесса формообразования пространственно-модифицированных зубчатых венцов, необходимо использовать описанные аналитическими зависимостями гладкие кривые, дважды дифференцируемые, с минимальным количеством управляемых элементов. В автоматизированных системах проектирования широко используются кривые Безье [4], [5]. Благодаря своим свойствам кривые Безье применяются и для описания геометрии профилей зубьев цилиндрических колес [6], [8].

Основные результаты

Значения координат точек на режущей кромки пальцевой модульной фрезы зависят от модуля, количества зубьев нарезаемого зубчатого колеса и угла наклона их линии зуба [3], [9]:

$$\left. \begin{aligned} X_P &= r_b \left(A_3 (\cos \beta_B)^2 \sqrt{(tg \beta_B)^2 + (\cos \varphi)^2} \right); \\ Y_P &= r_b \left(\sec \varphi - A_3 (\cos \beta_B)^2 \sin \varphi \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где A_3 — расчетный коэффициент, определяемый по зависимости:

$$A_3 = \frac{\pi}{2z_1} - inv \alpha_t + inv \varphi; \quad (2)$$

β_B — угол наклона винтовой линии на основном цилиндре:

$$tg \beta_B = tg \beta_W \cos \alpha_t; \quad (3)$$

φ — угол развернутости эвольвенты;

α_t — торцовый угол зацепления:

$$tg \alpha_t = tg \alpha_W / \cos \beta \quad (4)$$

Рассчитаем по зависимостям (1), (2), (3), (4) координаты точек на режущей кромке пальцевой модульной фрезы, предназначенной для нарезания шестерни с $z_1 = 20$ шт. и $m = 12$ мм. Добавив координаты граничных точек радиуса скруглений и прямолинейного участка, полученные результаты сведем в таблицу 1.

Таблица 1 - Значения координат точек на режущей кромке пальцевой модульной фрезы

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.1>

№ точки	X_{pi} , мм	Y_{pi} , мм	№ точки	X_{pi} , мм	Y_{pi} , мм
0	-2,794	0	7	-8,219	11,682
1	-5,477	1,033	8	-9,146	14,026
2	-6,774	3,599	9	-10,489	16,821
3	-7,171	7,542	10	-12,318	20,017
4	-7,192	7,740	11	-14,694	23,555
5	-7,320	8,509	12	-17,674	27,372
6	-7,636	9,832	—	—	—

Точки с номерами от 0 до 2 принадлежат участку дуги профиля зуба фрезы, точки с 2 до 3 прямолинейному отрезку, точки с 3 по 12 эвольвентному участку. Как было показано в работах [1], [2], [10] участки профиля зуба фрезы можно аппроксимировать с высокой степенью точности сплайнами Безье. Прямолинейный участок профиля зуба можно описать сплайном Безье первого порядка. Для аппроксимации участка дуги окружности и эвольвентного участка используются сплайны Безье третьего порядка. При этом выбираются 4 точки на каждой кривой. В итоге, исходя из геометрии режущей кромки пальцевой модульной фрезы, для ее описания применяется сплайн Безье 5 порядка.

Сплайн Безье 5-го порядка на плоскости задается системой уравнений [1], [2]:

$$\begin{cases} X(\lambda) = X_{p0} \cdot (1 - \lambda)^5 + 5X_{p1} \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10X_{p2} \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + \\ \quad + 10X_{p3} \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5X_{p4} \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + X_{p5} \cdot \lambda^5 \\ Y(\lambda) = Y_{p0} \cdot (1 - \lambda)^5 + 5Y_{p1} \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10Y_{p2} \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + \\ \quad + 10Y_{p3} \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5Y_{p4} \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + Y_{p5} \cdot \lambda^5. \end{cases} \quad (5)$$

В систему уравнений (5) входит 9 неизвестных: параметр сплайна λ и координаты опорных точек $X_{p1} - X_{p4}$, $Y_{p1} - Y_{p4}$ [1]. Для определения параметры сплайна Безье 5-го порядка необходимо задаться координатами $X(\lambda_i)$ и $Y(\lambda_i)$ 8-ми точек, принадлежащих режущей кромки пальцевой модульной фрезы (из таблицы 1). В результате получим систему из 16-ти уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X(\lambda_0) = X_{p0} \cdot (1 - \lambda_0)^5 + 5X_{p1} \cdot \lambda_0 \cdot (1 - \lambda_0)^4 + 10X_{p2} \cdot \lambda_0^2 \cdot (1 - \lambda_0)^3 + \\
 \quad + 10X_{p3} \cdot \lambda_0^3 \cdot (1 - \lambda_0)^2 + 5X_{p4} \cdot \lambda_0^4 \cdot (1 - \lambda_0) + X_{p5} \cdot \lambda_0^5 \\
 Y(\lambda_0) = Y_{p0} \cdot (1 - \lambda_0)^5 + 5Y_{p1} \cdot \lambda_0 \cdot (1 - \lambda_0)^4 + 10Y_{p2} \cdot \lambda_0^2 \cdot (1 - \lambda_0)^3 + \\
 \quad + 10Y_{p3} \cdot \lambda_0^3 \cdot (1 - \lambda_0)^2 + 5Y_{p4} \cdot \lambda_0^4 \cdot (1 - \lambda_0) + Y_{p5} \cdot \lambda_0^5 \\
 X(\lambda_1) = X_{p0} \cdot (1 - \lambda_1)^5 + 5X_{p1} \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_1)^4 + 10X_{p2} \cdot \lambda_1^2 \cdot (1 - \lambda_1)^3 + \\
 \quad + 10X_{p3} \cdot \lambda_1^3 \cdot (1 - \lambda_1)^2 + 5X_{p4} \cdot \lambda_1^4 \cdot (1 - \lambda_1) + X_{p5} \cdot \lambda_1^5 \\
 Y(\lambda_1) = Y_{p0} \cdot (1 - \lambda_1)^5 + 5Y_{p1} \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_1)^4 + 10Y_{p2} \cdot \lambda_1^2 \cdot (1 - \lambda_1)^3 + \\
 \quad + 10Y_{p3} \cdot \lambda_1^3 \cdot (1 - \lambda_1)^2 + 5Y_{p4} \cdot \lambda_1^4 \cdot (1 - \lambda_1) + Y_{p5} \cdot \lambda_1^5 \\
 \dots \\
 X(\lambda_7) = X_{p0} \cdot (1 - \lambda_7)^5 + 5X_{p1} \cdot \lambda_7 \cdot (1 - \lambda_7)^4 + 10X_{p2} \cdot \lambda_7^2 \cdot (1 - \lambda_7)^3 + \\
 \quad + 10X_{p3} \cdot \lambda_7^3 \cdot (1 - \lambda_7)^2 + 5X_{p4} \cdot \lambda_7^4 \cdot (1 - \lambda_7) + X_{p5} \cdot \lambda_7^5 \\
 Y(\lambda_7) = Y_{p0} \cdot (1 - \lambda_7)^5 + 5Y_{p1} \cdot \lambda_7 \cdot (1 - \lambda_7)^4 + 10Y_{p2} \cdot \lambda_7^2 \cdot (1 - \lambda_7)^3 + \\
 \quad + 10Y_{p3} \cdot \lambda_7^3 \cdot (1 - \lambda_7)^2 + 5Y_{p4} \cdot \lambda_7^4 \cdot (1 - \lambda_7) + Y_{p5} \cdot \lambda_7^5
 \end{array} \right. \quad (6)$$

Решив систему уравнений (6), используя численные методы [7], например, в математическом пакете MathCAD, определим параметры сплайна Безье 5-го порядка, который аппроксимирует профиль зуба пальцевой модульной фрезы таблица 2.

Таблица 2 - Результаты расчета параметров сплайна Безье 5-го порядка

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.2>

Xp1, мм	Yp1, мм	Xp2, мм	Yp2, мм	Xp3, мм	Yp3, мм	Xp4, мм	Yp4, мм
-8,907	-1,121	-6,734	14,281	-8,127	-0,281	-2,946	10,229
λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0	0,1217	0,2569	0,5767	0,5904	0,7494	0,8562	1

Подставив полученные в результате решения системы уравнений (6) значения координат опорных точек в систему уравнений (5), получим зависимости для определения координат точек, описывающих геометрию профиля зуба пальцевой модульной фрезы:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X(\lambda) = 8,907 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 - 6,734X_{p2} \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 - \\
 \quad - 8,127 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 - 2,946 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) - 17,674 \cdot \lambda^5 \\
 Y(\lambda) = -1,121 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 14,282 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 - \\
 \quad - 0,281 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 10,229 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + 27,372 \cdot \lambda^5
 \end{array} \right. \quad (7)$$

Выполнив расчеты по зависимостям (7), получим координаты точек сплайна таблица 3, который описывает режущую кромку зуба пальцевой модульной фрезы рисунок 1.

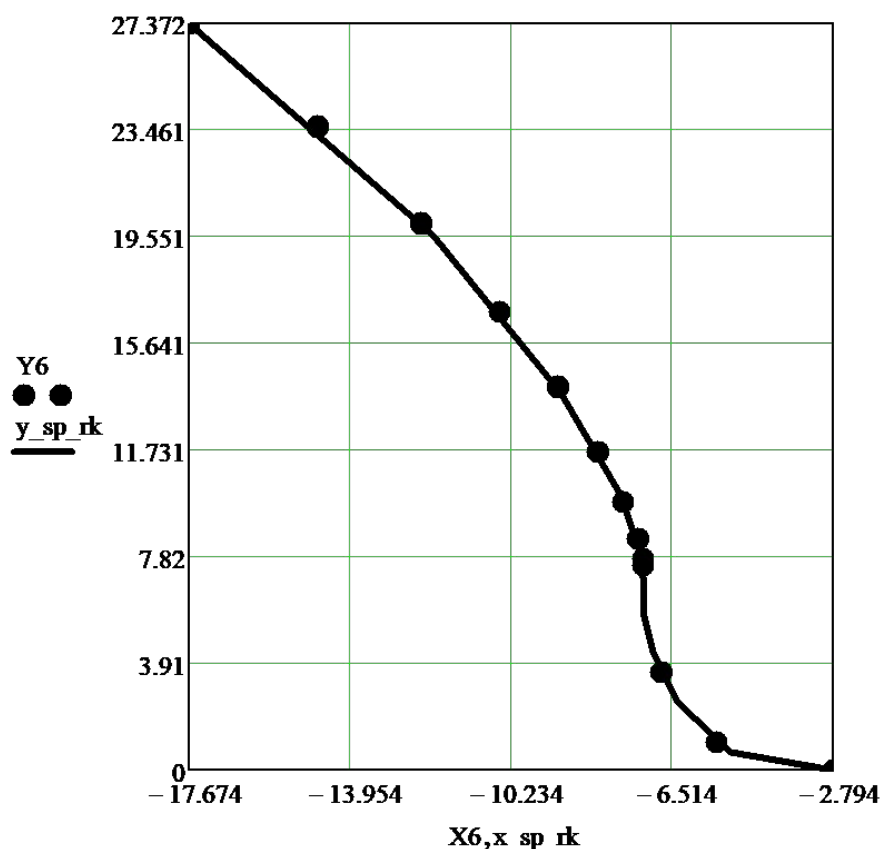


Рисунок 1 - Сплайн описывающий профиль зуба пальцевой модульной фрезы
DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.3>

Из рисунка 1 видно, что полученные в результате решения системы уравнений (6), параметры сплайна, позволяют с высокой точностью аппроксимировать профиль зуба пальцевой модульной фрезы сплайном Безье 5-го порядка. Для оценки точности аппроксимации профиля зуба пальцевой модульной фрезы сплайном, определим значения координаты $X(\lambda)$ при известном значении координаты (таблица 1) и сравним полученное значение координаты $X(\lambda)$ с табличным значением Y_{pi} , решением уравнения относительно параметра сплайна X_{pi} , соответствующие заданному табличному значению координат Y_{pi} :

$$Y(\lambda) = -1,121 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 14,282 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 - 0,281 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 10,229 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + 27,372 \cdot \lambda^5. \quad (8)$$

Таблица 3 - Результаты расчетов координат точек сплайна Безье 5-го порядка

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.4>

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$X(\lambda)$, мм	-2,794	-5,130	-6,384	-6,958	-7,133	-7,136	-7,211	-7,690	-9,065	-12,054	-17,674
$Y(\lambda)$, мм	0	0,676	2,525	4,324	5,646	6,653	7,887	10,055	13,825	19,613	27,372

Уравнение (8) можно решить численными методами в математическом пакете MathCAD с применением программного блока составленного в соответствии с блок-схемой рисунк 2.

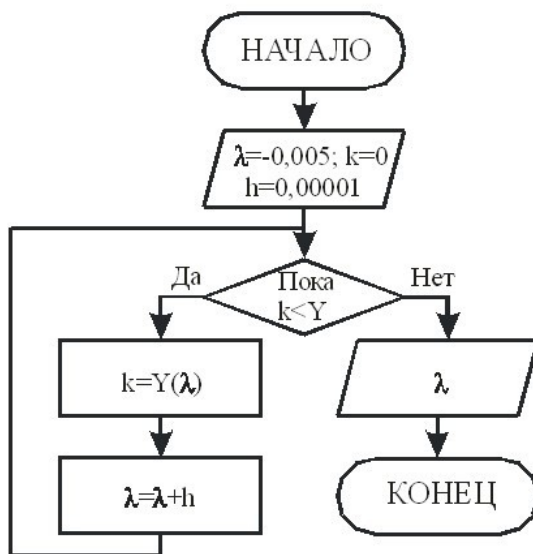


Рисунок 2 - Блок-схема программного модуля для решения уравнения (8)

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.5>

Найденные в результате решения уравнения (8) параметры сплайна λ подставляем в первое уравнение системы (5) и определяем значение координаты $X(\lambda)$ точки сплайна таблицу 4. Для полученных таким образом значений координат точек сплайна определим относительную погрешность (таблица 4).

Таблица 4 - Значения координат точек сплайна, соответствующие заданным значением координат Y_{pi}

DOI: <https://doi.org/10.60797/ENGIN.2026.12.1.6>

№ п/п	λ	$X(\lambda)$, мм	$\Delta X(\lambda)$, %	$Y(\lambda)$, мм	$\Delta Y(\lambda)$, %
0	0	0	0	0	0
1	0	-2,779	-0,54	0	0
2	0,1217	-5,477	$4,12 \cdot 10^{-3}$	1,033	0,03
3	0,2570	-6,774	$1,11 \cdot 10^{-3}$	3,599	$7,06 \cdot 10^{-3}$
4	0,5767	-7,171	$3,41 \cdot 10^{-4}$	7,542	$3,44 \cdot 10^{-3}$
5	0,5904	-7,192	$2,57 \cdot 10^{-4}$	7,740	$2,03 \cdot 10^{-3}$
6	0,6354	-7,313	-0,10	8,509	$4,29 \cdot 10^{-3}$
7	0,6921	-7,627	-0,11	9,832	$5,00 \cdot 10^{-3}$
8	0,7494	-8,219	$2,67 \cdot 10^{-3}$	11,683	$5,25 \cdot 10^{-3}$
9	0,8042	-9,152	0,07	14,027	$4,00 \cdot 10^{-3}$
10	0,8562	-10,490	$3,79 \cdot 10^{-3}$	16,822	$4,55 \cdot 10^{-3}$
11	0,9059	-12,299	-0,15	20,017	$3,58 \cdot 10^{-3}$
12	0,9536	-14,662	-0,22	23,556	$6,20 \cdot 10^{-3}$
13	1	-17,675	$8,33 \cdot 10^{-3}$	27,373	$6,26 \cdot 10^{-3}$

Заключение

Полученные зависимости позволяют выполнить полное описание геометрии режущей кромки пальцевой модульной фрезы, в отличие от известных зависимостей для расчета координат точек эвольвентного участка режущей кромки. Использование сплайнов Безье 5-го порядка для аппроксимации геометрии профиля зуба пальцевой модульной фрезы позволяет выполнять исследования параметры срезаемого слоя и силового нагружения режущих кромок, выполнять интенсификацию режимов резания, управлять параметрами поверхностного слоя боковой поверхности зубьев, совершенствовать геометрию режущей части пальцевой модульной фрезы и процессы



формообразования изделий с зубчатыми венцами. Относительная погрешность в определении координаты $X(\lambda)$ точек сплайна Безье 5-го порядка не превышает 0,6%.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Грубка Р.М. Аппроксимация координат точек профиля дисковой зуборезной модульной фрезы сплайнами Безье / Р.М. Грубка, И.А. Петряева, А.Н. Михайлов // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: международный сборник научных трудов. — 2017. — № 3(58). — С. 8–15.
2. Грубка Р.М. Аппроксимация профиля зуба дисковой зуборезной модульной фрезы сплайнами Безье / Р.М. Грубка, А.Н. Михайлов, И.А. Петряева // Известия ТулГУ. Технические науки. — Тула : ТулГУ, 2018. — Вып. 4. — С. 262–271.
3. Ординарцев И.А. Справочник инструментальщика / И.А. Ординарцев, Г.В. Филиппов, А.Н. Шевченко [и др.] ; под общ. ред. И.А. Ординарцева. — Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1987. — 846 с.
4. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. — Москва : Мир, 2001. — 604 с.
5. Белов В.В. Компьютерная реализация решения научно-технических и образовательных задач: учебное пособие / В.В. Белов, И.В. Образцов, В.К. Иванов [и др.] — Тверь : ТвГТУ, 2015. — 108 с.
6. Воронцов Б.С. Математическое обеспечение интерактивного синтеза передач зацеплением / Б.С. Воронцов // Вестник НТУ «ХПИ». — 2010. — № 27. — С. 49–54.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Москва : Наука, 1968. — 395 с.
8. Грубка Р.М. Определение параметров перехода между системами координат режущего инструмента и заготовки при многокоординатной обработке цилиндрических колес / Р.М. Грубка // Прогрессивные технологии и системы машиностроения : международный сборник научных трудов. — Донецк : ДонНТУ, 2021. — Вып. 2(73). — С. 29–35.
9. Грубка Р.М. Траектория перемещения стандартного инструмента при многокоординатной обработке пространственно-модифицированных зубьев цилиндрических колес методом копирования / Р.М. Грубка, М.В. Долматова, Ю.В. Сазоненко // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: международный сборник научных трудов. — Донецк : ДонНТУ, 2022. — Вып. 2(77). — С. 10–17.
10. Грубка Р.М. Аппроксимация координат точек пространственной траектории перемещения режущего инструмента при многокоординатной обработке пространственно-модифицированных зубчатых венцов сплайнами Безье / Р.М. Грубка, И.А. Петряева, А.В. Стёпочкина и др. // Фундаментальные основы физики, химии и механики наукоемких технологических систем формообразования и сборки изделий : сборник трудов научного симпозиума технологов-машиностроителей / под ред. В.А. Лебедева; Донской гос. техн. ун-т. — Ростов-на-Дону : ДГТУ, 2021. — С. 120–124.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Grubka R.M. Approksimatsiya koordinat tochek profilya diskovoy zuboreznoy modul'noy frezy splynamy Bez'ye [Approximation of coordinate points of the profile of a disc gear-cutting modular milling cutter by Bezier splines] / R.M. Grubka, I.A. Petryaeva, A.N. Mikhaylov // Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya [Progressive Technologies and Systems of Mechanical Engineering] : international collection of scientific papers. — 2017. — No. 3(58). — P. 8–15. [in Russian]
2. Grubka R.M. Approksimatsiya profilya zuba diskovoy zuboreznoy modul'noy frezy splynamy Bez'ye [Approximation of the tooth profile of a disc gear-cutting modular milling cutter by Bezier splines] / R.M. Grubka, A.N. Mikhaylov, I.A. Petryaeva // Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki [News of Tula State University. Technical Sciences]. — Tula : TulSU, 2018. — Iss. 4. — P. 262–271. [in Russian]
3. Ordintsev I.A. Spravochnik instrumental'shchika [Toolmaker's handbook] / I.A. Ordintsev, G.V. Filippov, A.N. Shevchenko [et al.] ; ed. by I.A. Ordintsev. — Leningrad : Machine Engineering. Leningrad Branch, 1987. — 846 p. [in Russian]
4. Rogers D. Matematicheskiye osnovy mashinnoy grafiki [Mathematical foundations of computer graphics] / D. Rogers, J. Adams. — Moscow : Mir, 2001. — 604 p. [in Russian]
5. Belov V.V. Komp'yuternaya realizatsiya resheniya nauchno-tekhnicheskikh i obrazovatel'nykh zadach [Computer implementation of solving scientific, technical and educational problems] : textbook / V.V. Belov, I.V. Obratstov, V.K. Ivanov [et al.] — Tver : TvSTU, 2015. — 108 p. [in Russian]
6. Vorontsov B.S. Matematicheskoye obespecheniye interaktivnogo sinteza peredach zatsepleniym [Mathematical support for interactive synthesis of gearing transmissions] / B.S. Vorontsov // Vestnik NTU "KhPI" [Bulletin of NTU "KhPI"]. — 2010. — No. 27. — P. 49–54. [in Russian]



7. Korn G. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers] / G. Korn, T. Korn. — Moscow : Nauka, 1968. — 395 p. [in Russian]
8. Grubka R.M. Opredeleniye parametrov perekhoda mezhdu sistemami koordinat rezhushchego instrumenta i zagotovki pri mnogokoordinatnoy obrabotke tsilindricheskikh koles [Determination of transition parameters between the coordinate systems of the cutting tool and the workpiece during multi-axis machining of cylindrical gears] / R.M. Grubka // Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya [Progressive Technologies and Systems of Mechanical Engineering] : international collection of scientific papers. — Donetsk : DonNTU, 2021. — Iss. 2(73). — P. 29–35. [in Russian]
9. Grubka R.M. Travektoriya peremeshcheniya standartnogo instrumenta pri mnogokoordinatnoy obrabotke prostranstvenno-modifitsirovannykh zub'yev tsilindricheskikh koles metodom kopirovaniya [Trajectory of movement of a standard tool during multi-axis machining of spatially modified teeth of cylindrical gears by the copying method] / R.M. Grubka, M.V. Dolmatova, Yu.V. Sazonenko // Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya [Progressive Technologies and Systems of Mechanical Engineering] : international collection of scientific papers. — Donetsk : DonNTU, 2022. — Iss. 2(77). — P. 10–17. [in Russian]
10. Grubka R.M. Approksimatsiya koordinat toчек prostranstvennoy trayektorii peremeshcheniya rezhushchego instrumenta pri mnogokoordinatnoy obrabotke prostranstvenno-modifitsirovannykh zubchatykh ventsov splynamy Bez'ye [Approximation of coordinate points of the spatial trajectory of the cutting tool during multi-axis machining of spatially modified gear rims by Bezier splines] / R.M. Grubka, I.A. Petryaeva, A.V. Styopochkina et al. // Fundamental'nyye osnovy fiziki, khimii i mekhaniki naukoymkikh tekhnologicheskikh sistem formoobrazovaniya i sborki izdeliy [Fundamental foundations of physics, chemistry and mechanics of high-tech technological systems of shaping and assembly of products] : collection of Proceedings of the Scientific Symposium of Machine-building Technologists / ed. by V.A. Lebedev; Don State Technical University. — Rostov-on-Don : DSTU, 2021. — P. 120–124. [in Russian]