ТРЕНИЕ И ИЗНОС В МАШИНАХ/FRICTION AND WEAR IN MACHINES

DOI: https://doi.org/10.60797/ENGIN.2025.8.2

МЕТОД РЕДУКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С ГАЗОСТАТИЧЕСКИМИ ПОДШИПНИКАМИ

Научная статья

Коднянко В.А.[1,] *, Крехова А.В.[2], Григорьева О.А.[3]
[1] ORCID : 0000-0002-2369-045X;
[1, 2, 3] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (vkodnyanko[at]sfu-kras.ru)

Аннотация

Изложен метод упрощения процедуры решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, описывающих нестационарное состояние газостатических подшипников. Проведён анализ общей модели статического состояний газостатических подшипников и приведён пример математической модели статического состояния осевого газостатического подшипника с двойным дросселированием газа в магистрали нагнетания газовой смазки. В результате проведенного анализа показано, что всегда существует возможность редукции исходной нелинейной системы к последовательности подзадач меньшей сложности. Предложенный подход позволяет уменьшить число уравнений, а в оптимальном случае преобразовать их в расчетные формулы. Рассмотрен пример системы, для которой найден идеальный способ ее решения посредством редукции уравнений к расчетным формулам.

Ключевые слова: газостатический подшипник, нелинейная система статического состояния, метод редукции, несущая способность, расход смазки.

REDUCTION METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR EQUATIONS OF STATIC STATE OF STRUCTURES WITH HYDROSTATIC GAS BEARINGS

Research article

Kodnyanko V.A.[1,] *, Krekhova A.V.[2], Grigoreva O.A.[3]
[1] ORCID : 0000-0002-2369-045X;
[1, 2, 3] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

* Corresponding author (vkodnyanko[at]sfu-kras.ru)

Abstract

A method is presented for simplifying the procedure for solving systems of nonlinear algebraic and transcendental equations describing the non-stationary state of hydrostatic gas bearings. An analysis of the general model of static states of hydrostatic gas bearings is carried out, and an example of a mathematical model of the static state of an axial hydrostatic gas bearing with double throttling of gas in the gas lubrication supply line is given. The analysis shows that it is always possible to reduce the initial nonlinear system to a sequence of subproblems of lesser complexity. The suggested approach allows reducing the number of equations and, in the best case, converting them into calculation formulas. An example of a system is discussed for which an ideal solution is found by reducing the equations to calculation formulas.

Keywords: hydrostatic gas bearing, nonlinear static system, reduction method, load capacity, lubricant consumption.

Введение

В металлорежущих станках и контрольно-измерительных приборах находят применение конструкции газостатических подшипников скольжения [1], [2], [3], [4], [5]. Такие подшипники применяются в контрольно-измерительном оборудовании (координатно-измерительных машинах, кругломерах, высотомерах и т. п.), а также в качестве опорных элементов в шпиндельных узлах металлорежущих станков.

Газостатические подшипники смазываются сжатым воздухом, поступающим от источника в проточный тракт, в котором могут использоваться, как пассивные, так и активные элементы ограничения потока газа в виде простых или кольцевых диафрагм, мембран, подвижных элементов иного вида для создания определенного давления, которое необходимо для поддерживания действующей нагрузки и контролируемого смещения подвижной части конструкции, обеспечивая тем самым ее низкую податливость несущего газового слоя, в том числе нулевую, а при необходимости в целях повышения точности металлообработки и отрицательную податливость [6], [7].

Одной из основных задач, которая ставится при исследовании подобных конструкций, является расчет их статических характеристик. Такие характеристики могут быть определены решением систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, содержащих ряд факторов, к числу которых относятся давления в магистрали нагнетания на выходе ограничителей расхода, воздушные зазоры в несущем слое и регуляторах давления, перемещения подвижных элементов, несущая способность, расход смазки и др. Общее количество таких уравнений и факторов даже для самых простых конструкций составляет 2–4 нелинейных уравнения и 5–7 фактора, а для сложных конструкций шпиндельных узлов с подшипниками отрицательной податливости число таких уравнений может доходить до 8–10, а число факторов и того больше.

Методы и принципы исследования

Математическая модель статического состояния каждой конструкции газостатического подшипника представляет собой систему нелинейных уравнений, которую в общем случае можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n\right) = 0, \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n\right) = 0, \\ \ldots \\ f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n\right) = 0, \\ \ldots \\ f_{m-1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n\right) = 0, \\ f_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}, x_n\right) = 0, \end{cases}$$

где x_j — факторы (статические характеристики), j = 1, 2, …, n–1, n; f_i — функции, i = 1, 2, …, m–1, m.

Даже если бы такая система уравнений содержала всего лишь одно нелинейное уравнение, то решение такой задачи само по себе представляло бы определенную трудность, поскольку для этого необходимо было бы разработать и применить численный метод, например, метод Брента [8], метод половинного деления [9] или метод золотого сечения [10] (если для решения используются методы оптимизации). Затем вычислив неизвестный фактор, на основании решения этого уравнения потребовалось бы найти остальные факторы при помощи расчетных формул.

Когда система содержит два и более нелинейных уравнений расчет факторов превращается в достаточно сложную задачу вычислительной математики. В таких случаях выход зачастую пытаются найти применением общих численных методов решения нелинейных уравнений, к числу которых относятся методы итераций [11], метод Зейделя [12], итерации Пикара [13], метод Ньютона [14], метод Ньютона-Рафсона [15], метод Бройдена [16] и их модификации. Как показывает опыт, проблема состоит в том, что даже при удачном начальном значении вектора неизвестных критериев первых два метода сходятся слишком медленно либо расходятся. Методы ньютоновского типа могут также расходиться поскольку функции расхода через дроссели не являются гладкими, чем и объясняется расходимость данных методов.

Вместе с тем, основываясь на опыте большого числа решенных для конструкций с газостатическими подшипниками задач специальными, учитывающими специфику систем уравнений методами, можно утверждать, что практически всегда существует возможность редукции общей системы нелинейных уравнений к системе с меньшим числом уравнений или даже сведения ее к последовательности формул для расчета неизвестных факторов, не обращаясь к общим методам решения систем нелинейных уравнений [11], [12], [13], [14], [15], [16].

Число n факторов в конструкциях газостатических подшипников всегда больше числа m уравнений, описывающих их статическое состояние ($n > m$), поэтому одну часть факторов задают, а другую часть рассчитывают посредством решения соответствующей системы нелинейных уравнений. Идею алгоритмической редукции такой системы, как методологического приёма преобразования упомянутой задачи к более простой и легче поддающейся решению форме, проиллюстрируем на примере расчета статических характеристик математической модели газостатического подшипника с одним дросселем в виде системы питающих кольцевых диафрагм [17].

На рисунке 1 представлена расчётная схема конструкция осевого газостатического подшипника.

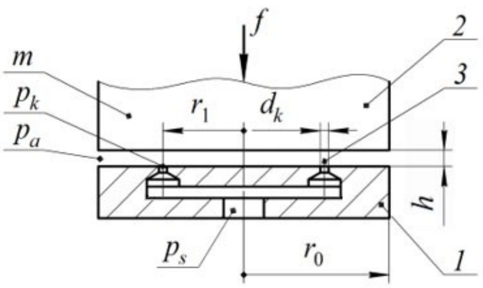

Рисунок 1 - Расчетная схема газостатического подшипника
DOI: https://doi.org/10.60797/ENGIN.2025.8.2.1

Примечание: 1 – его корпус, 2 – подвижный элемент, 3 – дросселирующие отверстия диаметра d_k

Статическая безразмерная модель подшипника включат пять нелинейных уравнений (m = 5), в том числе уравнение равенства расходов Q_h и Q_d на входе в диафрагмы и выходе газа в несущий слой подшипника безразмерной толщины H, уравнение силового равновесия подвижного элемента 2, связывающего несущую способность W и нагрузку F на подвижный элемент:

$$Q_h - Q_d = 0, \tag{1}$$

$$Q_d = A_d H \Pi\left(P_s, P_d\right), \tag{2}$$

$$Q_h = \frac{H^3\left(1-P_d^2\right)}{lnR_1}, \tag{3}$$

$$\frac{H^2\left(1-P_d^2\right)}{\ln R_1} - A_d \Pi\left(P_s, P_d\right) = 0, \tag{4}$$

$$W = R_1^2 P_d + 2\int_{R_1}^{1} R\left(\sqrt{\left(P_d^2-1\right)\frac{\ln R}{\ln R_1}+1}\right) dR - 1, \tag{5}$$

$$F = W, \tag{6}$$

где функция истечения Прандтля [18]

$$\Pi\left(P_s, P_d\right) = \begin{cases} \sqrt{\left(P_s - P_d\right) P_d}, & P_d/P_s > 0,5 \\ 0,5P_s, P_d/P_s \le 0,5. \end{cases} \tag{7}$$

Формулы (2), (3) содержат связи расходов с давлениями P_s и P_d на входе и выходе диафрагм, радиусом R_1 расположения питающих диафрагм, воздушным зазором H и критерием подобия диафрагм A_d. Интегральная формула (5) одновременно является уравнением связи несущей способности с давлением на выходе кольцевых диафрагм P_d и радиусом R_1.

В результате несложных преобразований математической модели в ней осталось 2 нелинейных уравнения (4) и (5) и расчетные формулы (2) или (3) и (6), поскольку расходы Q_h и Q_h равны.

Факторами статического состояния подшипника являются n = 9 безразмерных переменных: зазор H, радиус R_1, критерий A_d, давления P_d и P_s, силы W и F, расходы Q_d и Q_h. Сама модель статического состояния подшипника теперь является системой из двух нелинейных уравнений (4) и (5), в которых нужно так разделить 9 факторов на входные и выходные чтоб система была корректно решена посредством редукции её к двум расчетным формулам.

Идея алгоритмической редукции системы уравнений к более простому методу решения системы заключается в том, чтобы найти такой набор или конкурирующие наборы сочетания входных параметров, при котором систему из двух нелинейных уравнений можно было бы свести к минимальному числу уравнений. Важно, чтоб часть уравнений допускала бы их преобразование в формулы, при помощи которых можно было бы вычислить другие неизвестные факторы. Например, если бы в результате преобразований входными или вычисленными оказались такие факторы, как радиус R_1 и давление и P_d, то из уравнения (5), которое превращается в формулу, можно было бы численным интегрированием вычислить несущую способность W, а через нее на основании (1) найти внешнюю силу F. Возможны и другие подобные варианты, указывающие на принципиальную возможность существования упрощающих решение задачи посредством упомянутой редукции.

Основные результаты

Чтобы система нелинейных уравнений была корректной число уравнений должно быть равно числу неизвестных. Поскольку в нашем случае уравнений два, то и неизвестных должно быть столько же. Таким образом, прежде чем приступить к решению системы уравнений (4) – (5) из 9 факторов следует выбрать только 2. Сделать это можно разными способами, их число, очевидно, равно $C_9^5 = \frac{9!7!}{2!} = 36$ вариантов сочетания входных и выходных факторов. Лучшие с точки зрения допустимой максимальной редукции варианты подлежат анализу с целью выбора одного или нескольких их них для последующей реализации вычислительного алгоритма решения системы (3) – (4) с наименьшими трудностями.

Критериями отбора являются сочетания, при которых таблица будет содержать наибольшее число строк, в которых все кроме одного факторы являются входными (1), а один (0) неизвестный является автономным и из такого уравнения можно с той или иной степенью сложности найти этот неизвестный фактор, не решая всю систему. Теперь такой фактор становится известным и, возможно, с учетом этого вновь открывшегося обстоятельства станет возможным решить новые автономные уравнения, что в свою очередь откроет новые возможности и так до тех пор, пока в идеальном случае не будет решена вся система нелинейных уравнений.

Нередко наперед известно какие факторы предпочтительно назначить входными. Например, для системы (4) – (5) это критерий A_d, радиус R_1, давление наддува P_s. Впрочем, любой из них выбран в качестве рассчитываемого. В данном случае число факторов уменьшится и станет равным n = 3. Количество различных сочетаний варьируемых факторов H, P_d, W будет равно $C_3^2 = \frac{3!1!}{2!} = 3$. Поскольку в системе (4) – (5) уравнений два, а неизвестных факторов три, то можно попеременно задавать значение только одного из них, пытаясь найти два других посредством редукции к системе уравнений меньшего порядка либо к вычислительным формулам с последующим расчетом по ним оставшихся неопределенных факторов.

Обсуждение

Можно выделить три основных способа упрощения процедуры решения системы нелинейных уравнений статического состояния исследуемого газостатического подшипника.

Способ 1. Зададим неопределенный фактор H, положив, например, $H = 1$. Этот фактор входит в только уравнение 4, в котором теперь остается лишь один неизвестный фактор давление P_d, который как видно, можно найти лишь решив нелинейное уравнение. К формуле в данном случае это уравнение не сводится. И хотя решить такое уравнение не представляет серьезной проблемы, данная процедура значительно сложнее процедуры вычисления по формуле. После определения давления P_d можно обратиться к уравнению (5) найти по формуле численным интегрирование несущую способность W, внешнюю силу F по формуле (6), расходы Q_h и Q_d по формулам (3), (1) и тем самым задача будет решена. Недостатком данного способа является потребность в решении одного нелинейного уравнения.

Способ 2. Результаты расчетов будем сводить в таблицу 1. Теперь зададим фактор P_d, положив, например, $P_d = 0{,}7P_s$ (в таблице 1 это фактор второй очереди расчётов). Уравнение (4) теперь можно преобразовать в формулу и, используя её, затем вычислить зазор H (третья очередь определения фактора в таблице 1):

$$H = \sqrt{\frac{A_d \Pi(P_s, P_d) \ln R_1}{\left(1 - P_d^2\right)}}. \qquad (8)$$

Фактор P_d входит в оба уравнения (4) – (5), поэтому в уравнении (5) теперь все факторы, входящие в интеграл, известны и интегрированием (5) можно определить несущую способность подшипника W (четвертая очередь определения фактора), затем на основании (6) внешнюю силу F (пятая очередь определения фактора). И, наконец, определим расходы газа Q_d и Q_h по формулам (2) и (3) (шестая и седьмая очереди).

Таблица 1 - Факторы математической модели подшипника

DOI: https://doi.org/10.60797/ENGIN.2025.8.2.2

Факторы		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		A_d	R_1	P_s	H	P_d	W	F	Q_h	Q_d
Уравнения	1	1	1	1	3	2		5	6	7
	2		1			2	4			

Способ 2 не имеет недостатков, ибо позволяет идеально выполнить редукцию системы из двух нелинейных уравнений к двум расчетным формулам.

Способ 3. Наконец, зададим неопределенный фактор W. Данная попытка самая неудачная, потому что, во-первых, задать реальное числовое значение несущей способности достаточно затруднительно исходя из технических соображений и, во-вторых, при этом пришлось бы решать нелинейное интегральное уравнение, которое даже сложнее того уравнения, которое пришлось бы решать первым способом. Отметим, что попутно пришлось бы решать и уравнение (4), поскольку ни давление P_d ни зазор H не определены. По сути, способ приводит нас к задаче для нелинейной системы с двумя неизвестными, то есть самой сложной задаче из числа возможных.

Таким образом, наилучшим методом решения системы нелинейных уравнений, который позволил решить ее в идеальном виде, является способ 2, при помощи которого удалось решить систему нелинейных уравнений посредством редукции ее к последовательности расчетных формул.

Заключение

В статье изложена идея упрощения процедуры решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, описывающих нестационарное состояние газостатических подшипников. Её суть состоит в возможности редукции исходной нелинейной системы к последовательности подзадач меньшей сложности. Предложенный подход позволяет уменьшить число уравнений, а в идеальном случае преобразовать их в расчетные формулы. Рассмотрен пример системы, при решении которой найден наилучший способ ее решения посредством редукции уравнений к расчетным формулам. Описана общая методика редукции нелинейных систем к более простым подзадачам и метод их решения.

В результате анализа предложенного подхода установлено, что в общем случае идея редукции нелинейных систем, для которых число факторов всегда превышает число уравнений, может быть осложнена рядом специфических особенностей, затрудняющих нахождение наилучшего сочетания входных и выходных факторов, при которых система может быть решена с наименьшими трудностями. В частности, не всякий набор входных факторов является допустимым, что выявляется непосредственно либо в результате последовательного анализа состояния каждого уравнения системы. На наш взгляд, основной проблемой является разработка многокритериальной оценки оптимального набора входных факторов, при котором обеспечивается быстрое решение системы с минимальными затруднениями. Данной актуальной проблеме предполагается посвятить отдельную статью.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Шатохин С.Н. Влияние высокой частоты вращения на эксплуатационные характеристики адаптивного гидростатического подшипника / С.Н. Шатохин // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1990. — № 2. — С. 38–43.
2. Космынин А.В. Газовые подшипники высокоскоростных турбоприводов металлообрабатывающего оборудования / А.В. Космынин, В.С. Виноградов. — Владивосток : Дальнаука, 2002. — 326 с.
3. Коднянко В.А. Характеристики газостатического подпятника с активным регулятором перемещения / В.А. Коднянко // СТИН. — 2005. — № 9. — С. 23–25.
4. Строк Л.В. Аэростатические опоры в координатно-измерительных машинах / Л.В. Строк, В.С. Секацкий, Ю.А. Пикалов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2020. — № 5. — С. 26–36.
5. Кузнецов А.А. Перспектива применения гидравлического динамометра в различных отраслях авиадвигателестроения / А.А. Кузнецов, А.Н. Мурзин, М.А. Никифоров [и др.] // Проблемы и перспективы развития двигателестроения : материалы докладов международной научно-технической конференции. — Самара : Самарский университет, 2016. — С. 202–203.
6. Kodnyanko V.A. Mathematical Modeling on Statics and Dynamics of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling and Elastic Orifice Fluid Flow Regulation / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin, A.S. Kurzakov [et al.] // Lubricants. — 2020. — DOI: 10.3390/lubricants8050057.
7. Kodnyanko V.A. Theoretical Study on Dynamics Quality of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin // FME Transactions. — 2020. — Vol. 46. — № 4. — P. 342–350. — DOI: 10.5937/fme2002342K.
8. Press W.H. Section 9.3. Van Wijngaarden—Dekker—Brent Method // Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.) / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling [et al.]. — New York : Cambridge University Press, 2007.
9. Burden R.L. The Bisection Algorithm // Numerical Analysis (3rd ed.) / R.L. Burden, J.D. Faires. — PWS Publishers, 1985.
10. Васильков Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова. — Москва : Финансы и статистика, 1999. — 256 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — Бином, 2008. — 636 с.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы : учебное пособие / Н.Н. Калиткин. — БХВ Петербург, 2011. — 392 с.
13. Salkuye D.K. Iterative Picard-HSS method for equations with absolute values / D.K. Salkuye // Optim. Lett. — 2014. — № 8. — P. 2191–2202.
14. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. — Москва : Наука, 1984. — 160 с.
15. Рындин Е.А. Методы решения задач математической физики / Е.А. Рындин. — Таганрог : Издательство ТРТУ, 2003. — 120 с.
16. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Д. Ревизников. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с.
17. Kodnyanko V.A. Theoretical Study on Dynamics Quality of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin // FME Transactions. — 2020. — Vol. 46. — № 4. — P. 342–349.
18. Пинегин С.В. Статистические и динамические характеристики газостатических опор / С.В. Пинегин, Ю.Б. Табачников, И.Е. Сипенков. — Москва : Наука. 1982. — 265 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Shatohin S.N. Vlijanie vysokoj chastoty vrashhenija na jekspluatacionnye harakteristiki adaptivnogo gidrostaticheskogo podshipnika [Effect of high rotation frequency on the performance characteristics of an adaptive hydrostatic bearing] / S.N. Shatohin // Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin [Problems of mechanical engineering and machine reliability]. — 1990. — № 2. — P. 38–43. [in Russian]
2. Kosmynin A.V. Gazovye podshipniki vysokoskorostnyh turboprivodov metalloobrabatyvajushhego oborudovanija [Gas bearings of high-speed turbo drives of metalworking equipment] / A.V. Kosmynin, V.S. Vinogradov. — Vladivostok : Dal'nauka, 2002. — 326 p. [in Russian]
3. Kodnyanko V.A. Harakteristiki gazostaticheskogo podpjatnika s aktivnym reguljatorom peremeshhenija [Characteristics of a gas-static thrust bearing with an active displacement regulator] / V.A. Kodnyanko // STIN. — 2005. — № 9. — P. 23–25. [in Russian]
4. Strok L.V. Ajerostaticheskie opory v koordinatno-izmeritel'nyh mashinah [Aerostatic Bearings for Coordinate Measuring Machines] / L.V. Strok, V.S. Sekatsky, Yu.A. Pikalov // Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics]. — 2020. — № 5. — P. 26–36. [in Russian]

5. Kuznetcov A.A. Perspektiva primenenija gidravlicheskogo dinamometra v razlichnyh otrasljah aviadvigatelestroenija [The opportunity of using hydraulic dynamometer in different branches of aircraft engine building industry] / A.A. Kuznetcov, A.N. Murzin, M.A. Nikiforov [et al.] // Problemy i perspektivy razvitija dvigatelestroenija [Problems and prospects for the development of engine building] : proceedings of the international scientific and technical conference. — Samara : Samara University, 2016. — P. 202–203. [in Russian]

6. Kodnyanko V.A. Mathematical Modeling on Statics and Dynamics of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling and Elastic Orifice Fluid Flow Regulation / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin, A.S. Kurzakov [et al.] // Lubricants. — 2020. — DOI: 10.3390/lubricants8050057.

7. Kodnyanko V.A. Theoretical Study on Dynamics Quality of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin // FME Transactions. — 2020. — Vol. 46. — № 4. — P. 342–350. — DOI: 10.5937/fme2002342K.

8. Press W.H. Section 9.3. Van Wijngaarden—Dekker—Brent Method // Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.) / W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling [et al.]. — New York : Cambridge University Press, 2007.

9. Burden R.L. The Bisection Algorithm // Numerical Analysis (3rd ed.) / R.L. Burden, J.D. Faires. — PWS Publishers, 1985.

10. Vasilkov Yu.V. Komp'juternye tehnologii vychislenij v matematicheskom modelirovanii [Computer technologies of calculations in mathematical modeling] / Yu.V. Vasilkov, N.N. Vasilkova. — Moscow : Finance and Statistics, 1999. — 256 p. [in Russian]

11. Bahvalov N.S. Chislennye metody [Numerical methods] / N.S. Bahvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobelkov. — Binom, 2008. — 636 p. [in Russian]

12. Kalitkin N.N. Chislennye metody [Numerical methods] : textbook / N.N. Kalitkin. — BHV Peterburg, 2011. — 392 p. [in Russian]

13. Salkuye D.K. Iterative Picard-HSS method for equations with absolute values / D.K. Salkuye // Optim. Lett. — 2014. — № 8. — P. 2191–2202.

14. Tihonov A.N. Vvodnye lekcii po prikladnoj matematike [Introductory Lectures on Applied Mathematics] / A.N. Tihonov, D.P. Kostomarov. — Moscow : Nauka, 1984. — 160 p. [in Russian]

15. Ryndin E.A. Metody reshenija zadach matematicheskoj fiziki [Methods for Solving Problems of Mathematical Physics] / E.A. Ryndin. — Taganrog : Publishing House of Taganrog State Radio Engineering University, 2003. — 120 p. [in Russian]

16. Formalev V.F. Chislennye metody [Numerical Methods] / V.F. Formalev, D.D. Reviznikov. — Moscow : FIZMATLIT, 2004. — 400 p. [in Russian]

17. Kodnyanko V.A. Theoretical Study on Dynamics Quality of Aerostatic Thrust Bearing with External Combined Throttling / V.A. Kodnyanko, S.N. Shatokhin // FME Transactions. — 2020. — Vol. 46. — № 4. — P. 342–349.

18. Pinegin S.V. Statisticheskie i dinamicheskie harakteristiki gazostaticheskih opor [Statistical and dynamic characteristics of gasostatic bearings] / S.V. Pinegin, Yu.B. Tabachnikov, I.E. Sipenkov. — Moscow : Nauka. 1982. — 265 p. [in Russian]